Sistemi di Leggi di Bilancio
e
Formulazione Matriciale

Le leggi di bilancio sono suscettibili, grazie alla loro struttura, di essere scritte nella seguente forma del tutto generale

$$\partial_t \mathbf{F}^\circ + \partial_i \mathbf{F}^i = \mathrm{f} \tag{1.11}$$

dove $\mathbf{F}^\circ$,$\mathbf{F}^i$ ed f sono vettori colonna ad **N** componenti.

Osserviamo anche che, introducendo la variabile $x^\circ = t$, la (1.11) è suscettibile di essere scritta nella forma ancora più compatta

$$\partial_\alpha \mathbf{F}^\alpha = \mathrm{f} \tag{1.15}$$

Quest'ultima si può anche scrivere (poichè $\mathbf{F}^\alpha \equiv \mathbf{F}^\alpha(\mathbf{u})$) nella forma equivalente

$$\mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \mathbf{u} = \mathrm{f} \tag{1.16}$$

dove le matrici $\mathbf{A}^\alpha$ sono

$$\mathbf{A}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial \mathbf{u}}$$

N.B.: si noti che da (1.11) ⇒ (1.16),
mentre il viceversa è vero solo se è verificata l'ultima uguaglianza; in questo caso il sistema (1.16) è un sistema di leggi di bilancio.

In relazione al sistema scritto in questa forma si parla di:

i) sistema lineare: le matrici $\mathbf{A}^\alpha$ sono costanti e f è lineare in $\mathbf{u}$

ii) sistema semi-lineare: le matrici $\mathbf{A}^\alpha$ sono costanti ma f non è lineare

iii) se le $\mathbf{A}^\alpha$ ed f sono funzioni non lineari del campo, il sistema (1.16), essendo lineare nelle derivate prime (derivate massime) si dice *quasi lineare*.

Definizione di sistema iperbolico (nella direzione t del tempo)

Un sistema del tipo

$$\mathbf{A}^{\alpha}(\mathbf{u})\partial_{\alpha}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \qquad \alpha = 0,1,2,3$$

si dice iperbolico nella direzione t se:

a) $$\det \mathbf{A}^{0} \neq 0$$

b) $\forall$ versore $\mathbf{n} \in R^3$ il seguente problema agli autovalori

$$(\mathbf{A}_n - \lambda \mathbf{A}^0)\mathbf{d} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{A}_n = \mathbf{A}^i n_i \qquad i = 1,2,3$$

ha tutti gli autovalori λ reali

ed i corrispondenti autovettori destri $\mathbf{d}$ formano una base di R^N

Si noti che nel caso lineare le λ sono tutte costanti mentre nel caso non lineare dipendono dal campo $\mathbf{u}$ (ciò implica, nel caso non lineare, che l'iperbolicità può perdersi per certi valori del campo).

Per capire fisicamente la definizione di iperbolicità si tenga presente quanto segue.

1) Gli autovalori λ rappresentano fisicamente le velocità dei fronti con cui si propagano i segnali: la condizione di realtà associata ai λ implica pertanto che la propagazione possa effettivamente avvenire

2) $\det \mathbf{A}^\circ \neq 0$ esclude che l'autovalore λ vada ad infinito (si vede subito che se $\det \mathbf{A}^\circ = 0$ allora vi è almeno un $\lambda \Rightarrow \infty$: in sostanza è questo il caso parabolico);

3) Il fatto che tutti gli autovettori $\mathbf{d}$ siano linearmente indipendenti implica che un dato di Cauchy arbitrario si possa dividere in N modi.