Es. 4 Prova Intermedia B 25/5/05

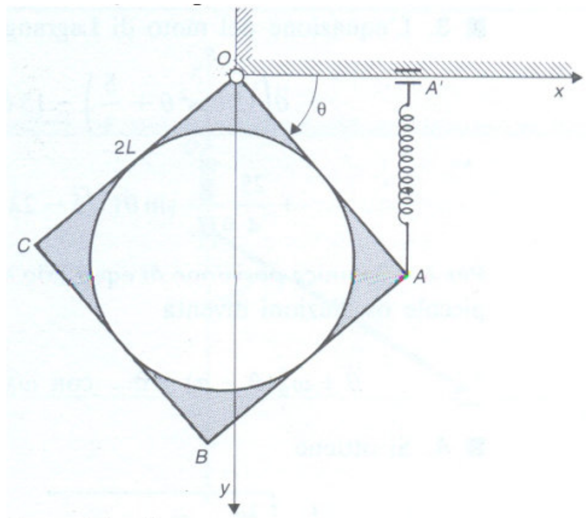
In un piano verticale Oxy una lamina quadrata omogenea (massa m e lato 2L) in cui è stato praticato un foro circolare di raggio L, è vincolata a ruotare attorno al vertice O senza penetrare nella parete
Il sistema è soggetto, oltre che alla forza peso, ad una forza elastica $\mathbf{F}_e = kAA'$ *(A' è la proiezione ortogonale di A sull'asse Ox) agente sul vertice A della lamina e ad una coppia di momento*

$$\mathbf{M} = mgL\sin\theta\,\mathbf{k}\,.$$

Supposto il vincolo liscio ed introdotto il parametro adimensionale

$$\lambda = \frac{mg}{4kL} \in \mathbf{R}^+$$

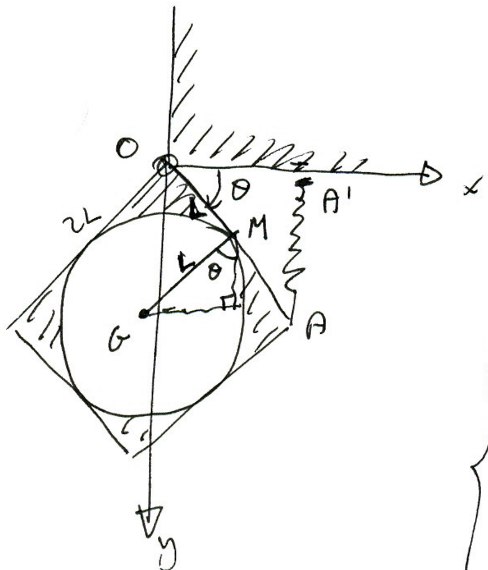
determinare, utilizzando la coordinata lagrangiana θ *indicata in figura:* le posizioni ordinarie di equilibrio e la reazione vincolare in O utilizzando le equazioni cardinali della statica.



Esercizio 4)

P. I. B

ES. 4



DATI

QUADRATO FORATO OMOGENEO!

$2L$, m

$\underline{P} = m\underline{g}$; $\underline{F}_e = k\,AA'$; $\lambda = \frac{mg}{4kL} > 0$

$\underline{M} = mgL\sin\theta\,\underline{k}$

$\boxed{0 \le \theta \le \pi}$

$OM = (L\cos\theta, L\sin\theta)$

$OG = OM + MG$

$MG = (-L\sin\theta, L\cos\theta)$

$\boxed{OG = \big(L(\cos\theta - \sin\theta),\ L(\sin\theta + \cos\theta)\big)}$

$OA = (2L\cos\theta, 2L\sin\theta)$

$AA' = (0, -2L\sin\theta)$, $\underline{\Phi}^o = (\phi^o_x, \phi^o_y)$

$$\begin{cases} \underline{R}^{(e,a)} + \underline{R}^{(e,v)} = \underline{0} \\ \underline{M}^{(e,a)}_o + \underline{M}^{(e,v)}_o = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{P} + \underline{F}_e + \underline{\Phi}^o = \underline{0} \\ OG \wedge m\underline{g} + OA \wedge k\,AA' + \underline{M} = \underline{0} \end{cases}$$

N.B.: così otteniamo subito l'eq. pura per l'equilibrio

$$\begin{cases} \text{asse } x & \boxed{\Phi^o_x = 0} \\ \text{asse } y & mg - 2kL\sin\theta + \Phi^o_y = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi^o_y = 2kL\sin\theta - mg} \\ & mgL\cos\theta - \cancel{mgL\sin\theta} - 4kL^2\sin\theta\cos\theta + \cancel{mgL\sin\theta} = 0 \end{cases}$$

$$OG \wedge m\underline{g} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ L(\cos\theta - \sin\theta) & L(\sin\theta + \cos\theta) & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = mgL(\cos\theta - \sin\theta)\,\underline{k}$$

$$OA \wedge k\,AA' = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2L\cos\theta & 2L\sin\theta & 0 \\ 0 & -2kL\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -4kL^2\sin\theta\cos\theta\,\underline{k}$$

Sviluppiamo l'eq. dei momenti (eq. pura per l'equilibrio):

$$\underset{\neq 0}{4KL^2}\cos\theta\left(\underbrace{\frac{mg}{4KL}}_{=\lambda}-\sin\theta\right)=0$$

$$\cos\theta\,(\lambda-\sin\theta)=0 \iff \begin{cases}\cos\theta=0 \begin{cases}\boxed{\theta_1=\pi/2 \\ \lambda>0} \\ \cancel{\theta=\frac{3}{2}\pi} \text{ NON ACC. (x chè } >\pi) \end{cases} \\ \sin\theta=\lambda \end{cases}$$

C.E.

$$-1\le\lambda\le 1,\quad \lambda>0$$

$$\Downarrow$$

$$0<\lambda\le 1$$

$$\boxed{\theta_2=\arcsin\lambda,\ 0<\lambda\le 1}$$

$$\boxed{\theta_3=\pi-\theta_2,\ 0<\lambda\le 1}$$

N.B.: x $\lambda=1$ si ha che $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\pi/2$

RIASSUMENDO:

CI SONO 3 POS. DI EQUIL.

$$\boxed{\begin{array}{l}\theta_1=\pi/2,\ \lambda>0 \\ \left.\begin{array}{l}\theta_2=\arcsin\lambda, \\ \theta_3=\pi-\theta_2\end{array}\right\}0<\lambda\le 1\end{array}}$$

La reazione vincolare nelle posizioni di equilibrio vale:

$$\begin{cases}\Phi^o_x=0 & \boxed{\theta_1,\theta_2,\theta_3} \\ \Phi^o_y=2KL\sin\theta-mg= & \begin{cases}2KL-mg=2KL(1-2\lambda) & \boxed{\theta_1} \\ 2KL\lambda-mg=2KL(\lambda-2\lambda)= \\ =-2KL\lambda & \boxed{\theta_2,\theta_3}\end{cases}\end{cases}$$

Anche se non è necessario, si può riscrivere Φ^o_y così:

$$\Phi^o_y=2KL(\sin\theta-2\lambda)$$